

Control 5 Álgebra MA 110

Punto Problema 1

Sea $(S, *)$ una estructura algebraica con neutro e y $*$ una operación asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ con inverso $a^{-1} \in S$ se define la operación Δ en S por

$$\forall x, y \in S, \quad x \Delta y = x * a * y$$

i) Demuestra que la ley Δ es asociativa, tiene neutro y calculable.

Sean $x, y, z \in S$. Según la definición de la ley Δ y usando la asociatividad de $*$

$$(x \Delta y) \Delta z = (x * a * y) \Delta z = (x * a * y) * a * z = x * a * (y * a * z) \\ \stackrel{\text{def } \Delta}{=} x * a * (y \Delta z) \stackrel{\text{def } \Delta}{=} x \Delta (y \Delta z)$$

Entonces $\forall x, y, z \in S \quad (x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$ asocia $\rightarrow (1.0)$

Si $p \in S$ es neutro para Δ , entonces, $\forall x \in S, \quad x \Delta p = x$

$$\Leftrightarrow x * (a * p) = x \quad \text{de donde debe cumplirse que } a * p = e$$

Como a es invertible para $*$ $a * p = e \quad / \quad a^{-1} *$ y asociando

$$\Rightarrow (a^{-1} * a) * p = e^{-1} * e \Rightarrow e * p = e^{-1} \Rightarrow p = e^{-1} \rightarrow (0.7)$$

Para el neutro debe verificarse por la izquierda

$$\text{Así } p \Delta x = e^{-1} \Delta x = e^{-1} * a * x = e * x = x \quad \text{cumple.}$$

Segue que $p = e^{-1} \in S$ es neutro para Δ en S . $\rightarrow (0.3)$

ii) Caracterice los elementos invertibles para Δ y calcule el inverso de a con respecto a Δ

- Si $x \in S$ es invertible para Δ , entonces $\exists y \in S; \quad x \Delta y = e^{-1} = \text{neutro en } \Delta$

$$\Leftrightarrow x * a * y = a^{-1} \quad / \quad * a \Rightarrow x * (a * y * a) = e \quad \text{de donde se}$$

deduce que x es también invertible para $*$ con inverso $(a * y * a)$

Verificando por la izquierda, $y \Delta x = e^{-1} \Leftrightarrow y * a * x = e^{-1} \quad / \quad a *$

$$\Rightarrow (a * y * a) * x = e, \quad \text{es decir, el mismo inverso por la izquierda}$$

Recíprocamente, si x es invertible para $*$, entonces

$$x \Delta y = e^{-1} \Leftrightarrow x * e * y = e^{-1} \Rightarrow a * y = x^{-1} * e^{-1} / \overline{a^{-1} *}$$

$$\Rightarrow y = e^{-1} * x^{-1} * e^{-1} = \text{inverso de } x \text{ para } \Delta$$

que por la izquierda se verifica pues

$$\begin{aligned} y \Delta x &= (e^{-1} * x^{-1} * e^{-1}) \Delta x = (e^{-1} * x^{-1} * e^{-1}) * e * x = (e^{-1} * x^{-1}) * \underbrace{(e^{-1} * e)}_e * x \\ &= e^{-1} * \underbrace{(x^{-1} * x)}_e = e^{-1} * e = e^{-1} \end{aligned}$$

En consecuencia: x es invertible para Δ , si y solo si, x es invert. para $*$

NOTA: Calificar con (1.5 pts) cualquiera de las dos implicancias anteriores y con (0.5 pts) la otra.

De lo anterior, el inverso para Δ de $x \in S$ invertible para $*$ es

$$y = e^{-1} * x^{-1} * e^{-1} \text{ que en el caso de } a \in S \text{ es}$$

$$y = e^{-1} * e^{-1} * a^{-1} = (e^{-1})^3 \longrightarrow (1.0)$$

iii) Si $(S, *)$ es grupo, decide si (S, Δ) también lo es.

Si $(S, *)$ es grupo, todos sus elementos son invertibles para $*$, en consecuencia también lo son para Δ

Sigue que (S, Δ) posee neutro, Δ es asociativa (según (i)) y todos sus elementos son invertibles.

Entonces (S, Δ) es también grupo. $\longrightarrow (1.0)$

Control 5 Álgebra MA 110

Parte Problema 2

Sea $A = (\mathbb{R} - \{0\}) \times (\mathbb{R} - \{0\})$. Se define sobre A la operación \circ por

$$(x, y) \circ (u, v) = (xu, yv)$$

i) Demuestra que (A, \circ) es un grupo abeliano.

• La operación \circ es asociativa. Sean $(x, y), (u, v), (s, t) \in A$

$$\begin{aligned} [(x, y) \circ (u, v)] \circ (s, t) &= (xu, yv) \circ (s, t) = ((xu)s, (yv)t) \text{ por Asociatividad} \\ &= (x(us), y(vt)) = (x, y) \circ (us, vt) = (x, y) \circ [(u, v) \circ (s, t)] \end{aligned} \longrightarrow (1.0)$$

• Existe neutro en $A : (m_1, m_2)$

$$\begin{aligned} \text{Sea } (x, y) \in A, \quad (x, y) \circ (m_1, m_2) &= (x, y) \Leftrightarrow (xm_1, ym_2) = (x, y) \\ \Rightarrow \begin{matrix} xm_1 = x \\ ym_2 = y \end{matrix} &\Rightarrow m_1 = m_2 = 1 \Rightarrow (m_1, m_2) = (1, 1) \in A. \end{aligned}$$

Verificando $(1, 1) \circ (x, y) = (x, y) \longrightarrow (1.0)$

• $\forall (x, y) \in A$, (x, y) es invertible con inverso $(x', y') \in A$ tal que.

$$(x, y) \circ (x', y') = (1, 1) = \text{Neutro} \Leftrightarrow (xx', yy') = (1, 1) \Rightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ yy' = 1 \end{cases}$$

En $(x', y') = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ inverso de (x, y) que también verifica por la izquierda $\longrightarrow (1.0)$

ii) Considere $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ fijo. Se define $H \subseteq A$ por

$$H = \{(x, y) \in A \mid y = x^a\}$$

Demuestra que (H, \circ) es subgrupo de (A, \circ)

• Al probar la propiedad compacta se debe probar que

$$\forall (x, y), (u, v) \in H \Rightarrow (x, y) \circ (u, v) \in H \text{ en que } (u, v) \text{ es inverso de } (u, v)$$

$$\text{En efecto, } (x, y) \in H \Rightarrow y = x^a \Leftrightarrow (x, y) = (x, x^a)$$

$$(2.0) \rightarrow (u, v) \in H \Rightarrow v = u^a \Rightarrow (u, v) = (u, u^a) \Rightarrow (u, v') = \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right) = \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{u^a}\right)$$

Entonces

$$(x, y) \circ (u', v') = (x, y) \circ \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v} \right) = (x, x^u) \circ \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{u^u} \right) = \left(\frac{x}{u}, \frac{x^u}{u^u} \right)$$

$$\text{Segue que } (x, y) \circ (u', v') = \left(\frac{x}{u}, \left(\frac{x}{u} \right)^u \right) \in H \longrightarrow \textcircled{1.0}$$